

Matematično modeliranje žerjava

Miha Šušterič, Primož Vintar, Rok Vintar

Mentor: prof. dr. Aleš Belič

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za elektrotehniko

Tržaška cesta 25, Ljubljana

susteric.miha@gmail.com, primoz.vintar@gmail.com, rok.vintar@gmail.com

Mathematical modeling of a container crane

Article describes mathematical modeling and model validation of a container crane, with intention to use such model in process of control design. The model has been validated on Amira PS600, which is a laboratory device representing the simplified container crane.

Mathematical model, obtained with help of Lagrange equations, is implemented in programming environment Matlab/Simulink. A few corrections were made in order to improve the model of crane. Corrections were obtained with experimental modeling.

Results of comparison of developed models with device are presented with help of graphs.

Kratek pregled prispevka

Predstavljena je izdelava in validacija matematičnega modela žerjava za premik tovora, z namenom uporabe modela v procesu načrtovanja vodenja. Opisan postopek validacije je izveden na laboratorijski napravi Amira PS600, ki v eni izmed svojih izvedb predstavlja fizični model žerjava, ki smo ga modelirali.

Dobljeni matematični model, izpeljan s pomočjo Lagrange-ovih enačb, smo izvedli v programskem okolju Matlab/Simulink. V želji po izboljšanju osnovnega modela, smo na podlagi eksperimentalnega modeliranja določili nekaj modelov z izboljšanimi parametri.

Ujemanje posameznih modelov z dejanskimi rezultati meritev na napravi je predstavljeno s pomočjo grafov.

1 Uvod

Za potrebe načrtovanja vodenja, se pogosto uporablja matematične modele realnih naprav. Ob morebitni napaki v procesu, je vodenje tako moč načrtovati z manjšim tveganjem povzročitve škode na realni napravi ali njeni okolici. Prav tako je takšen pristop primeren za znižanje stroškov načrtovanja, saj lahko isti model s prilagoditvijo parametrov uporabimo za načrtovanje vodenja na več podobnih napravah in s tem zmanjšamo stroške, ki bi lahko nastali ob prekinitvi procesov dela na posameznih napravah. Omogoča pa tudi načrtovanje vodenja, za napravo, ki je še v procesu izdelave, vendar so njeni parametri že poznani.

Osnovni matematični model laboratorijske naprave Amira PS600, ki lahko v eni izmed svojih izvedb predstavlja žerjav za premik tovora, smo izpeljali s pomočjo Lagrange-ovih enačb. Določitev parametrov, ki niso bili podani v dokumentaciji naprave, in korekcij za odpravo pomanjklivosti, ki so se pokazale pri postopku validacije modela, pa je potekalo eksperimentalno.

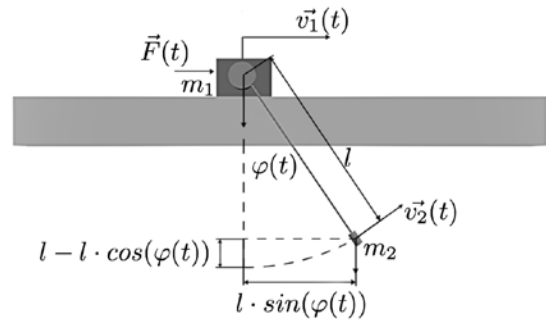
2 Poenostavitev problema

Glavni cilj matematičnega modeliranja je zapis sistema z enačbami, ki čim bolj opišejo njegovo obnašanje. Ker sistem v realnosti opisuje skupek fizikalnih pojavov in vplivov iz okolja, ki so med seboj bolj ali manj kompleksno povezani, je lahko matematični zapis takšnega sistema zelo kompleksna funkcija. Zaradi zahtev vodenja, reševanja enačb v doslednem času, ter nezmožnosti določitve nekaterih parametrov, je simselno uvesti določene poenostavitve, katere pa na končni rezultat ne smejo imeti prevelikega vpliva.

Ker načeloma žerjavi prenašajo tovor z veliko maso, smo za naš matematični model žerjava predpostavili, da je njegovo obnašanje opisano kar z matematičnim nihalom na vozičku. Ker je masa pletenice precej manjša od mase tovora, ki na ta način skrbi, da se pletenica med nihanjem ne zvija, je takšna predstavitev pletenice, kot brezmasne palice upravičena.

3 Izpeljava enačb osnovnega matematičnega modela naprave z viskoznim trenjem

Za izpeljavo modela sistema prikazanega na sliki 1 s pomočjo Lagrange-ovih enačb, moramo poznati kinetično ter potencialno energijo in zapisati močnostno funkcijo.



Slika 1: Skica naprave.

$$T_k = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad (1)$$

$$V_p = m_2 l g \cdot (1 - \cos(\varphi)) \quad (2)$$

$$P_x = \frac{1}{2} b \dot{x}^2 \quad (3)$$

$$P_\varphi = \frac{1}{2} f \dot{\varphi}^2 \quad (4)$$

Po enačbi (5) določimo Lagrangian in nato z njegovo pomočjo še končni enačbi za premik vozička v smeri x in odmik tovora za kot φ .

$$L = T_k - V_p \quad (5)$$

$$(m_1 + m_2) \ddot{x} + m_2 l \ddot{\varphi} \cos(\varphi) - m_2 l \dot{\varphi}^2 \cdot \sin(\varphi) + b \dot{x} = F(t) \quad (6)$$

$$m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l \ddot{x} \cdot \cos(\varphi) + m_2 l g \cdot \sin(\varphi) + f \dot{\varphi} = 0 \quad (7)$$

4 Parametri modela naprave Amira PS600

Iz dokumentacije [1], ki je priložena napravi (na sliki 2) lahko preberemo naslednje parametre:

- masa vozička (m_1): 2 kg
- masa tovora (m_2): 0,31 kg
- dolžina palice (l): 0,5 m
- faktor pretvorbe U v F : 2,25 N/V

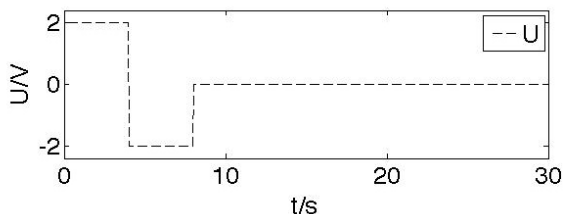


Slika 2: Naprava Amira PS600.

V enačbah se pojavlja tudi gravitacijski pospešek, katerega privzeta vrednost je $9,81 \text{ m/s}^2$.

5 Določitev nepoznanih parametrov in validacija modela.

Z vstavitvijo poznanih parametrov naprave v enačbi (7) in (8), dobimo model, ki opisuje realno napravo. Vendar pa je ta še vedno nepopoln, saj mu je potrebno določiti še oba faktorja dušenja. Določili smo ju eksperimentalno, tako da smo model presneli v okolje Matlab/Simulink in s poizkušanjem poiskali parametre, ki so ob vhodnem signalu na sliki 3 najboljše opisali sistem.



Slika 3: Vhodni signal 1.

Omeniti je potrebno, da smo že iz meritev ugotovili, da trenje med vozičkom in podlago ni enako v obe smeri. Premik vozička v smer $-x$ je namreč bistveno manjši od premika v smeri x , kljub temu, da se spremeni le smer delovanja sile, ostale vrednosti pa ostanejo enake. Problem, bi v modelu lahko rešili z različnim faktorjem trenja, ki bi bil odvisen od smeri gibanja, vendar pa smo se odločili za drugačen pristop. Problem smo interpretirali kot spremembo faktorja pretvorbe iz U v F , pri spremembi smeri signala. S tem smo težavo Simulink sheme predstavili na tisti del kode, kjer opisujemo vhodni signal.

Na podlagi eksperimentiranja smo tako določili nov faktor pretvorbe za premike v smeri

$-x$. Ta faktor je manjši od v dokumentaciji podanega faktorja in znaša $1,68 \text{ N/V}$. Vendar pa to ni rešilo vseh težav. Zelo dobro je pri takšnem preprostem opisu modela opaziti, da opis trenja med podlago in vozičkom ni najboljši, saj se preveč kaže odvisnost trenja od hitrosti. Parametri nastavljeni pri enem signalu, so se že pri majhnih spremembah le tega izkazali, kot povsem neuporabni.

5.1 Izboljšanje opisa trenja med podlago in vozičkom

Da bi model izboljšali in mu s tem omogočili manjšo občutljivost na motnje, smo se posvetili izboljšanju opisa trenja med podlago in vozičkom. Kljub predvideni izboljšavi smo želeli, da celoten matematični zapis ne postane preveč kompleksen.

Možnosti za spremembe člena trenja je precej. Najprej pa se pričakovano ponudi osnovna možnost, torej Coulombovo trenje. Coulombovo trenje je v fazi gibanja definirano kot ne-ničelna konstanta, v mirovnoem stanju pa ima vrednost nič. Takšen člen bi bil fizikalno ustrezen pri popolnem stiku med podlago in vozičkom. Ker pa v realnosti popolnega stika ni, je takšen opis pregrob in prehitro duši dinamiko sistema.

Trenje lahko opišemo tudi kot kombinacijo viskoznega dušenja in člena Coulombovega trenja. Takšna kombinacija vseekakor predstavlja realnejši opis, vendar pa se je pri preizkusu še vedno pokazala kot manj učinkovita od uporabljene modifikacije.

Če želimo, da posamzneni deli člena predstavljajo realno fizikalno dogajanje, potem zadeva kaj hitro postane precej kompleksna zaradi teorije v odzadju. Nekaj izpeljav takšnih modelov obravnavajo Campbell, Crawford in Morris v svojem članku Friction and the Inverted Pendulum Stabilization Problem [2]. Slabost je, da takšni modeli vsebujejo veliko parametrov, ki bi jih bilo potrebno z ustreznimi poizkusi in dobrim poznavanjem odzadja določiti eksperimentalno za vsako napravo posebej.

Ker za naše potrebe potrebujemo člen, ki bo dobro opisal dinamiko trenja, ne potrebujemo pa, da prikazuje tudi fizikalno ozadje, smo se izboljšanja lotili eksperimentalno. Tako smo prišli do ugotovitve, da trenje dovolj dobro opisuje četrti koren hitrosti, ki je ustržno obtežen.

Ker predznak hitrosti predstavlja le smer gibanja, mora biti funkcija, ki opisuje trenje v odvisnosti od hitrosti liha. Četrti koren, tako kot vsaka funkcija s sodim korenskim eksponentom, ni liha funkcija. Ne-pozitivno število pod četrim korenem, je namreč kompleksno število. Ustrezen zapis funkcije trenja tako predstavlja izraz (8).

$$b \cdot \text{sign}(\dot{x}) \cdot \sqrt[4]{|\dot{x}|} \quad (8)$$

Z uvedbo odvisnosti trenja od četrtega korena hitrosti, smo zmanjšali vpliv hitrosti pri njenih višjih vrednostih in tako bistveno izboljšali model.

Ob takšni spremembi modela, je potrebno ponovno določiti parameter b . S postopkom optimizacije smo tako dobili vrednosti $b = 5,7$ in $f = 0,0085$.

Popoln model naše naprave je z vsemi poznanimi parametri določen z enačbama 9 in 10.

$$2,31 \cdot \ddot{x} + 0,115 \cdot \ddot{\varphi} \cos(\varphi) - 0,115 \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin(\varphi) + 5,7 \cdot \text{sign}(\dot{x}) \cdot \sqrt[4]{|\dot{x}|} = F(t) \quad (9)$$

$$0,0775 \cdot \ddot{\varphi} + 0,115 \cdot \ddot{x} \cdot \cos(\varphi) + 1,52055 \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin(\varphi) + 0,0085 \cdot \dot{\varphi} = 0 \quad (10)$$

6 Izvedba modela v okolju Matlab/Simulink

6.1 Problem sodih korenov

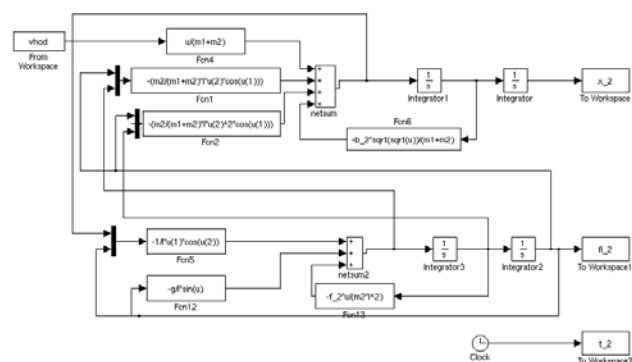
V okolju Matlab/Simulink je potrebno biti pri realizaciji sodih korenov pazljiv. Med tem, ko Matlab, pri pisanju v .m skripte ali komandno okno, takšne korene obravnava korektno pa pri Simulinku ni vedno tako. Do različice R2010a, je funkcijski blok *Sqrt*, pri nastavitvah izhodnega signala *auto* in *real*, na svojem izhodu dajal vrednosti, ki ustrezajo izrazu (8). Novejše različice (vključno z R2010a) pa v okolju Simulink ponujajo funkcijski blok *Sqrt*, ki vrne numerično korektno rešitev, in

funkcijski blok *signedSqrt*, ki vrne rešitev ustrežno izrazu (8).

Pri izdelavi modela, smo za izračun posameznih delov enačb uporabili funkcijski blok *Fcn*, ki omogoča pisanje poljubnih funkcij. Pri uporabi ukaza *sqrt* v funkcijskem bloku *Fcn* pa je potrebno biti pazljiv, saj se le ta obnaša kot funkcijski blok *signedSqrt* in vrne numerično nekorektno rešitev. Ker smo v našem primeru želeli opisati izraz (8) smo to anomalijo izkoristili.

6.2 Izvedba simulacije

Ker hitrost simulacije pri načrtovanju ni igrala pomembne vloge, smo simulacijsko shemo zgradili s pomočjo funkcijskih blokov *Fcn*, kamor lahko vpišemo kar daljše algebrajske izraze, in multiplekserjev. Simulacijska shema je prikazana na sliki 4.



Slika 4: Simulacijska shema v Simulink-u.

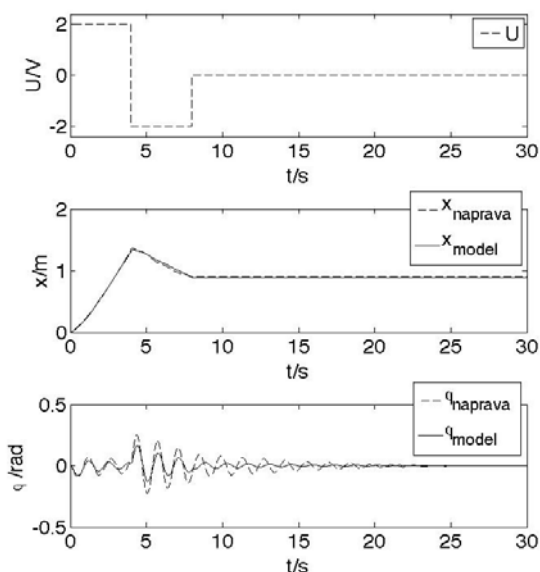
Za večjo univerzalnost simulacijske sheme, ki nam je omogočala eksperimentiranje z modelom, so izrazi opisani s spremenljivkami, ki jim dejanske vrednosti priredimo z .m skripto v Matlabu, pred zagonom simulacije.

Za potrebe primerjave simulacije z dobljenimi meritvami na napravi, smo pri načrtovanju simulacijske sheme pazili, da je bil čas vzorčenja enak, kot pri zajemu podatkov, torej 0,1 s. Simulacijo smo izvajali na intervalu dolgem 30 s.

7 Preizkus modela z različnima signaloma

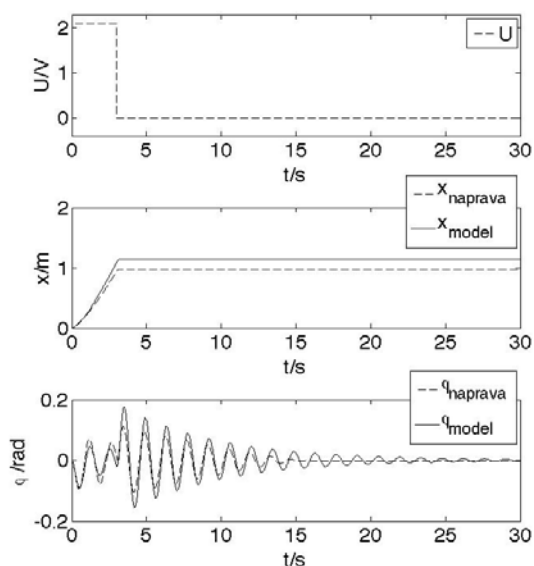
Model smo uglasili s pomočjo signala na sliki 3, zato gre pričakovati, da bo ujemanje med meritvami in simulacijo na modelu ob

vzbujanju s tem signalom veliko. Primerjavo lahko vidimo na sliki 5.



Slika 5: Primerjava odziva realnega sistema in modela ob vzbujanju s signalom 1.

Iz slike je razvidno, da je ujemanje dobro predvsem pri pomiku vozička, kjer je dinamika naprave dobro opisana. Pri kotu odmika tovora je videti malo večja odstopanja, vendar pa so vsaj začetni, večji odmiki dobro opisani. Ujemata se tudi frekvenci nihanja.



Slika 6: Primerjava odziva realnega sistema in modela ob vzbujanju s signalom 2.

Ob premiku iz delovne točke, v kateri smo optimalno nastavili parametre, se vidi (slika 6), da je tudi ta model še vedno pomanjkljiv, saj se pojavi napaka, ki pa je bistveno manjša, kot pri uporabi viskoznega dušenja.

8 Linearizacija modela

Za potrebe vodenja, modele pogosto lineariziramo, saj je načrtovanje regulatorjev tako preprostejše. Vendar pa linearizacija v sam model prinese dodatne omejitve v smislu območja uporabnosti. Pri lineariziranju moramo za to določiti delovno točko, v kateri naj bi naprava delovala ter skozi njo potegniti premico, ki funkcijo dejanskega odziva dovolj dobro opiše na čim širšem območju.

Pri linearizaciji je potrebno vse nelinearne člene enačb zamenjati z linearnimi. Na podlagi območja, kjer naj bi žerjav za prenos tovora deloval, smo uvedli naslednje poenostavitve nelinearnih členov:

- za majhne odmike nihala po kotu φ predpostavimo da je $\sin(\varphi) \approx \varphi$, $\cos(\varphi) \approx 1$ in $\varphi^2 \sin(\varphi) \approx 0$,
- trenje realizirano z izrazom (8), lineariziramo z razvojem v Taylorjevo vrsto okrog delovne točke, ki je v našem primeru koordinatno izhodišče. Ker ima funkcija tam singularnost, smo linearizirali v bližnji okolici koordinatnega izhodišča. Najbolj optimalen odmik smo poiskali s pomočjo optimizacije. Pri tem smo prvi člen Taylorjeve vrste zanemarili, saj predstavlja le premik po osi y , s tem pa smo predpostavili, da smo linearizacijo izvedli kar v točki 0.

Po linearizaciji lahko model opišemo z enačbama (11) in (12), kjer ξ predstavlja odmik iz točke 0, kjer smo izvedli linearizacijo.

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l \ddot{\varphi} + \frac{b}{4 \cdot \xi^{0,75}} \dot{x} = F(t) \quad (11)$$

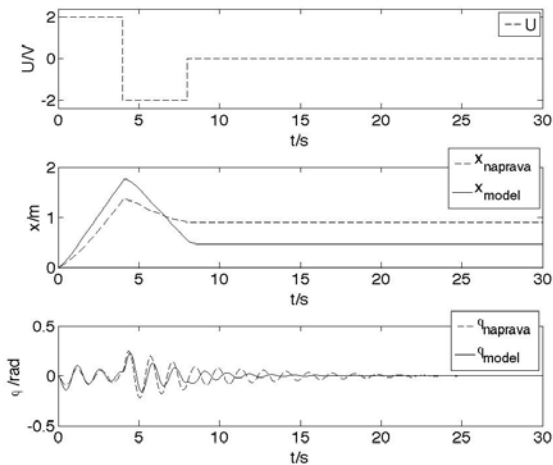
$$m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l \ddot{x} + m_2 l g \varphi + f \dot{\varphi} = 0 \quad (12)$$

9 Preizkus lineariziranega modela

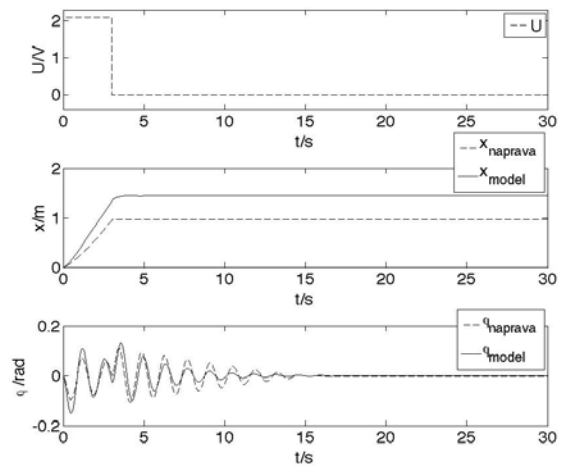
Linearen model smo preizkusili z enakimi signali, kot nelinearnega. Zaradi

poenostavljenega zapisa gre pričakovati, da so rezultati slabši, kar se pokaže tudi na slikah 7 in 8. Vidimo lahko, da model še vedno dobro opisuje odmik tovora iz mirovne lege, saj so koti res majhni in s poenostavitvami nismo naredili večjih napak. Pri simulaciji pozicije vozička, pa se pojavijo večja odstopanja. Hitrosti, ki se pojavljajo pri premikih, ki jih določata signala, niso tako zelo blizu točke linearizacije in tu gre iskati razlog za napake.

Glede na ponovljivost realnega sistema, o kateri je več besed omenjenih v odseku 10, pa tudi ta odstopanja ne predstavljajo, tako velikega problema, in bi model lahko uporabili, za načrtovanje vodenja.



Slika 7: Primerjava odziva realnega sistema in linearnega modela ob vzburjanju s signalom 1.

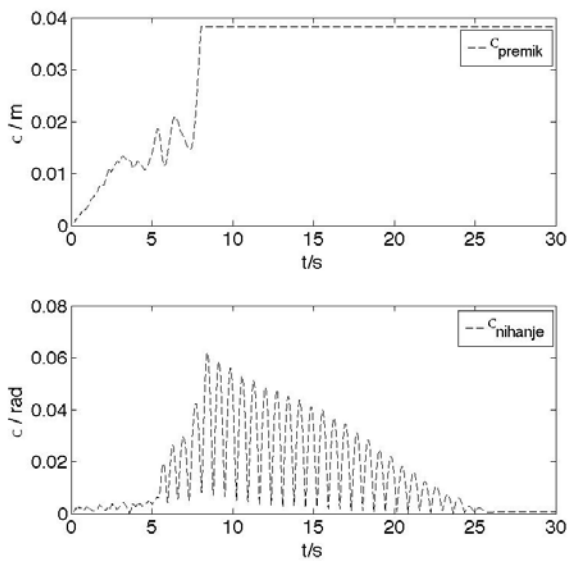


Slika 8: Primerjava odziva realnega sistema in linearnega modela ob vzburjanju s signalom 2.

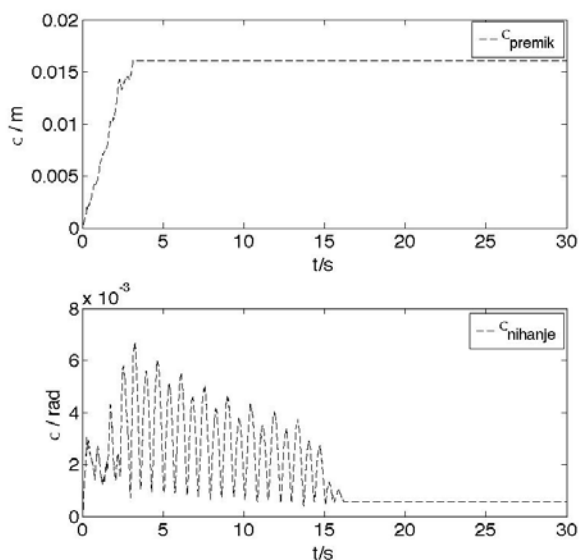
10 Standardna deviacija meritev

Pri določanju parametrov modela in razlaganju rezultatov simulacije je potrebno upoštevati tudi ponovljivost realnega sistema. V ta namen je potrebno na realnem sistemu izvesti več meritev pri istem vhodnem signalu. Te meritve nato s pomočjo statističnih metod ovrednotimo, da dobimo najbolj tipičen odziv realnega sistema na nek signal. V našem primeru smo najbolj tipičen odziv določili s povprečno vrednostjo petih meritev realnega odziva naprave.

Za boljše informacijo o meritvah realnega odziva ter območja, na katerem se vrednosti pojavljajo, je na slikah 9 in 10 podana standardna deviacija meritev za oba naša signala.



Slika 9: Standardna deviacija signala 1.



Slika 10: Standardna deviacija signala 2.

11 Zaključek

Pri modeliranju žerjava za prenos tovora, smo razvili dva modela, ki dokaj dobro opisujeta njegovo delovanje. Prednost nelinearnega modela je predvsem v njegovi zmogljivosti, med tem ko je lineariziran model primernejši za nadaljno uporabo pri načrtovanju vodenja, saj ga lahko zapišemo na več različnih načinov in uporabimo metode za linearne sisteme.

12 Literatura

- [1] Amira GmbH, PS600, Laboratory Experiment Position Control. [Online], [citirano 27. 1. 2013; 12:00], Dostopno na spletnem naslovu: http://212.235.191.194/Download/PS600_gb_Position.pdf.
- [2] CAMPBELL, S., A., Crawford S. in Morris K., Friction and the Inverted Pendulum Stabilization Problem. [Online], [citirano 27. 1. 2013; 12:00], Dostopno na spletnem naslovu: http://www.home.agilent.com/upload/cmc_upload/All/E206HPVEE_TESTENGR_EVAL.pdf.
- [3] The MathWorks, Inc., Why does Math function block with SQRT option output the wrong result for negative input when the output signal type is set to 'auto' or 'real' in Simulink 7.0 (R2007b)? [Online], [Datum zadnjega popravljanja 19. 5. 2010], [citirano 14. 3. 2013; 12:00], Dostopno na spletnem naslovu: <http://www.mathworks.com/support/solutions/en/data/1-9412VP/?product=SL&solution=1-9412VP>.
- [4] Lagrangian [Online], [Datum zadnjega popravljanja 4. 3. 2013 ob 22:07], [citirano 18. 3. 2013; 10:00], Dostopno na spletnem naslovu: <http://en.wikipedia.org/wiki/Lagrangian>.